7-11-18

<u>Θεώρημα</u> (Bolzano-Weierstrass)
κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

• Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ κ' $a \in \mathbb{R}$. Τότε a είναι σ.σ. τ.ω. A αν
$\exists \{a_n\}$ τ.ω. $a_n \in A \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}$ κ' $a_n \to a$

$*$ a σ.σ. του A αν $\forall \delta > 0$, $\exists x = x(\delta) \in A$, τ.ω. $x \in (a-\delta, a+\delta)$
$\setminus \{a\}$

όλα τα σ.σ. του A

Απόδειξη

· Έστω ότι $a \in A' \xrightarrow[\underbrace{x = x(\forall n)}_{a_n}]{\delta = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}} \exists a_n \in A, a_n \neq a$ κ'

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n \neq a$ κ' $a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \exists \{a_n\}$, τ.ω. $\underbrace{a_n \in A \setminus \{a\}}_{\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A \setminus \{a\}}$ κ' $a_n \to a$

Έστω ότι $\exists \overline{\{a_n\} \subseteq A \setminus \{a\}}$ τ.ω. $a_n \to a$

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists \underbrace{n_0}_{n_0 = n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, a_n \neq a, \forall n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq a$ κ' $\forall n \geq n_0, a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists n_0$, τ.ω. $a_{n_0} \neq a$ κ' $a_{n_0} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $a_{n_0} \in A$

$\Rightarrow a \in A'$

· $A \subseteq \mathbb{R}$, A κλειστό αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία μέσα από το A έχει όριο μέσα στο A

Απόδειξη

A κλειστό αν $A' \subseteq A$. Έστω ότι A κλειστό και

έστω $\{a_n\} \subseteq A$ τω. $a_n \to l \in \mathbb{R}$

Θδο $l \in A$

Περίπτωση 1 $\to \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω. $a_{n_0} = l \Rightarrow l \in A$.

Περίπτωση 2 $\to a_n \neq l, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{l \in A' \subseteq A}_{A \text{ κλειστό}}$,

Έστω ότι $\forall \{a_n\} \subseteq A$, τ.ω. $a_n \to l$, ισχύει $l \in A$.

Έστω $l \in A'$. Τότε $\exists \{a_n\} \subseteq A \setminus \{l\} \subseteq A$ τω.

$a_n \to l \overset{\text{υπόθ.}}{\Longrightarrow} l \in A \Rightarrow A' \subseteq A \Rightarrow A$ κλειστό

• $A \subseteq \mathbb{R}$, A κλειστό κ' φραγμένο. Τότε κάθε ακολουθία από το A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που το όριό της ανήκει στο A.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\{a_n\} \subseteq A$. Τότε $\{a_n\}$ φραγμένη επειδή A φραγμένη
$\xrightarrow{\text{Θεώρημα}}$ $\exists \{a_{k_n}\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$, όμως $l \in A$ επειδή A
Bolzano
Weierstrass
κλειστό.

• Αν όλες οι συγκλίνουσες υπακολουθίες μιας φραγμένης ακολουθίας $\{a_n\}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο, τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει.

<u>Απόδειξη</u>

$\{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ που να συγκλίνει σε κάποιο $l \in \mathbb{R}$. Έστω ότι $a_n \not\to l$.

<u>$a_n \to l$:</u> $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| \geq \varepsilon$

<u>$a_n \not\to l$:</u> $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, δεν ισχύει $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq n_0$,
τ.ω. $|a_{n(n_0)} - l| \geq \varepsilon$

$\hookrightarrow n = n(n_0)$
Το n που εξαρτάται από το n_0

$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \geq k$, $|a_{n_k} - l| \geq \varepsilon$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτω $\nu_k = \min\{n \geq k : |a_n - l| \geq \varepsilon\}$

ν_k γν. αύξουσα

$a_n \not\to l$ ανν $\exists \varepsilon > 0$, $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών $\{\nu_k\}$ τ.ω. $\forall k \in \mathbb{N}$, $|a_{\nu_k} - l| \geq \varepsilon$

$a_n \not\to l$ αν $\exists\, \varepsilon > 0$ και η υπακολουθία a_{n_k} της a_n τω $a_{n_k} - l \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τω για κάποιο $\varepsilon > 0$ να ισχύει $|a_{k_n} - l| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Όμως $\{a_{k_n}\}$ φραγμένη.
$\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\{a_{k_{v_n}}\}$ της $\{a_{k_n}\}$ που να συγκλίνει σε κάποιο $m \in \mathbb{R}$. Επίσης, $|a_{k_{v_n}} - l| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |m - l| \geq \varepsilon \Rightarrow m \neq l$ ATOΠΟ

- Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία

Απόδειξη
Περίπτωση 1 $\to \forall n_0 \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{a_n : n \geq n_0\}$ έχει μέγιστο. Θέτω $k_1 = 1 \Rightarrow \{a_n, n \geq k_1\}$ έχει μέγιστο
$\Rightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{N}$ τω $a_{k_2} = \max\{a_n : n \geq k_1\}$
$\{a_n : n \geq k_2\}$ έχει μέγιστο $\Rightarrow \exists\, k_3 \in \mathbb{N}$ τω. $a_{k_3} = \max\{a_n : n \geq k_2\} \Rightarrow a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq a_{k_3} \geq a_{k_4}$
$a_{k_4} = \max\{a_n : n \geq k_3\}$
Η $\{a_{k_n}\}$ είναι φθίνουσα υπακολουθία της $\{a_n\}$

Περίπτωση 2 $\to \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \{a_n : n \geq n_0\}$ δεν έχει μέγιστο
$k_1 = n_0 \Rightarrow \exists\, k_2 : a_{k_2} > a_{k_1}$. Τότε $\{a_n : n \geq k_2\}$ δεν έχει μέγιστο.
Έστω ότι $\{a_n : n \geq k_2\}$ έχει μέγιστο έστω αν
$\{a_n, n \geq k_1\} = \{a_{k_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2-1}\} \cup \{a_n : n \geq k_2\}$
$\Rightarrow \{a_n, n \geq k_1\}$ έχει μέγιστο, $\max\{a_v, a_{k_1}, \ldots, a_{k_2-1}\}$
ATOΠΟ

$\Rightarrow \exists\, k_3 \in \mathbb{N} > a_{k_3} > a_{k_1}$. Ομοίως, $\exists\, k_4$, $a_{k_4} > a_{k_3}$
κ.ο.κ
Τότε η $\{a_{k_n}\}$ είναι γν. αύξουσα υπακολουθία της $\{a_n\}$

Ορισμός
Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται Cauchy ή βασική αν
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall\, n, m \geq n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0,\ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$

Θεώρημα
$\{a_n\}$ συγκλίνει ανν $\{a_n\}$ Cauchy

Απόδειξη
Έστω ότι $a_n \to l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$\forall\, n \geq n_0,\ |a_n - l| < \varepsilon/2$
Έστω $\varepsilon > 0$, έστω $m, n \geq n_0 = n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| =$
$|(a_m - l) - (a_n - l)| \leq |a_m - l| + |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\Rightarrow \{a_n\}$ Cauchy

Έστω ότι $\{a_n\}$ Cauchy
1º Βήμα $\to \{a_n\}$ φραγμένη. Παίρνω $\varepsilon = 1$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$\forall\, n, m \geq n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon = 1$
Παίρνω $m = n_0$: $\forall\, n \geq n_0,\ |a_n - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow \forall\, n \geq n_0,$
$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \Rightarrow \{a_n\}$ φραγμένη $\xRightarrow[\text{Bolzano Weierstrass}]{\text{Θεώρημα}} \exists\, \{a_{k_n}\}$ τ.ω.
$a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$, για κάποιο $l \in \mathbb{R}$

2º Βήμα $\to$ Θδο $a_n \to l$
Έστω $\varepsilon > 0$, $a_{k_n} \to l$: $\exists\, n_0' \in \mathbb{N}: \forall\, n \geq n_0',\ |a_{k_n} - l| < \varepsilon/2$

$\{a_n\}$ Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon/2$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, k_{n_0'}\} \Rightarrow \forall n \geq n_0'' \Rightarrow n \geq n_0$, $\forall n \geq n_0''$
$\Rightarrow k_n \geq k_{n_0'} \geq n_0' \Rightarrow |a_n - \ell| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - \ell)| \leq$
$|a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall n \geq n_0'' \Rightarrow a_n \to \ell$

Παραδείγματα

$a_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$, νδο. $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει

$$|a_{2n} - a_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Για $\varepsilon = 1/2$, $\nexists$ n_0 τω $\forall n,m \geq n_0$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$
$\Rightarrow \{a_n\}$ όχι Cauchy. Άρα δεν συγκλίνει